



TITLE:

相互作用を行う無限箇の粒子系の
作るMarkov過程 : Boltzmann方程式
に関連して (生物モデルの数学)

AUTHOR(S):

上野, 正

CITATION:

上野, 正. 相互作用を行う無限箇の粒子系の作るMarkov過程 :
Boltzmann方程式に関連して (生物モデルの数学). 数理解析研究所講究
録 1973, 174: 31-50

ISSUE DATE:

1973-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107068>

RIGHT:

相互作用を行う無限数の粒子系の Markov 過程 —— Boltzmann 方程式の連続性 ——

と 錦 正

この項では上の表題のような Markov 過程を構成すること
と、この運動の新しい propagation of chaos とよばれる現象
が見られることを述べるのとが本稿の目的である。この
の起りは Boltzmann 方程式¹⁾あり、これは相互作用を行う稀
薄な気体分子の分布を記述する方程式である。

1. Boltzmann 方程式は気体分子の位置の空間 $S (= \mathbb{R}^3)$ と
速度の空間 $R (= \mathbb{R}^3)$ の直積 $S \times R$ 上の確率分布 $u(t, dx dx')$ の
Lebesgue 測度 $dx dx'$ に関する density function $u(t, x, x')$ に関する
方程式である。とくに方程式は初期条件も位置空間に依存
せず、したがって解も空間的に一様となり、速度の分
布の空間に関する方程式と見た場合に spatially homogeneous であ
ると云う。このため scattering cross section の一定の條
件(例として有界性)を付け加え、density $u(t, x)$ の空間分布
 $u(t, x)$ に関する方程式と見ると $u(t, x)$ の連続性が
示される。

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} u(t, yx) u(t, yx') \tilde{f}(x, x') (\mathbb{T}(x, x', E) - \delta_2(\bar{x}))$$

$$u(t, \bar{x}) \rightarrow f(\bar{x})$$

$\therefore, u \varphi(x, u) \geq 0, \quad \Pi \text{ 中 } R \text{ 是 } \alpha \text{ 绝对收敛的, } f(x, u) \in R$
 $\text{是 } \alpha \text{ 绝对收敛的.} \quad \therefore, \tau \varphi(x, u) \text{ 是 } (x) \text{ 的 } \alpha \text{ 绝对收敛的.}$
 $\therefore (x) \in (\text{由 } (x) \text{ 中 } \varphi(x, u) \text{ 的 } \alpha \text{ 绝对收敛}), \quad \text{故 } \alpha \text{ 绝对收敛的 } (x) \text{ 是 } \alpha \text{ 绝对收敛的.}$

$$(2) \quad u(t, E) = u_0(t, E) + \int_0^t \int_{R^2} u(z, x) u(z, x') g(x) \int_R \pi(x, x', y) p_0(t-z, y, E) dz dx dx'$$

但 L,

$$p_0(t, x, E) = e^{-t \frac{\delta}{\delta x}(E)} \quad u_0(t, E) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_0(t, x, E)$$

こゝで x, y が τ の近接する点 R は τ の近接する点 E^3 である。従って τ の近接する点 R は τ の近接する点 E^3 である。従って τ の近接する点 R は τ の近接する点 E^3 である。

このとき (2) の大体の意味はさうなるのである。無限
の同じ振動粒子が揃って、この瞬間刻に初期分布から出
発して interact して行く。運動して行く、我々もこの、50-

粒子の運動に着目して、各粒子が interact するまでの時間 $\tau(x)$ が定め、この時刻が来ると他の一粒子と interact して jump する。Jump の仕方は $\pi(x, x', E)$ が定め、(6) 型の粒子は x から E へ、他の粒子の位置 x' の影響をうけて jump する。この粒子もひとりの jump から、次の jump までの (6) の状態になる。このとき、方程式 (2) の右辺第 1 項は interact する前、第 2 項は少なくとも一回 interact したの δE による破壊を受ける。

また、上では $p_0(t, x, E)$ の形と具体的にあらわしたが、これから次の議論では次の条件 (3) を満たす R 上の transition probability $p_0(t, x, E)$ を与えておく。この場合にも、ひとりの jump から次の jump までの t を t として与えられる Markov 過程の軌道 $x(t)$ を動かしてとれた。この Markov 過程の $g(x)$ による killing の結果から (3) の $p_0(t, x, E)$ となる。

$$(3) \quad \begin{aligned} p_0(s+t, x, E) &= \int_R p_0(s, x, dy) p_0(t, y, E) \\ \int_0^t ds \int_R p_0(s, x, dy) g(y) &= 1 - p_0(t, x, R) \end{aligned}$$

≡ 事態をもう少し詳しく見てみるために (2) をもとにして次の方程式も与える。

$$(4) \quad p^f(t, x, E) = p_0(t, x, E) + \int_0^t \int_{R^2} p^f(\tau, x, dy) p^f(\tau, dy') g(y) \\ \times \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-\tau, z, E)$$

$$\text{但し, } p^f(t, E) = \int_R f(dx) p^f(t, x, E).$$

(2) は (4) の両辺を $f(dx)$ に積分すれば左辺の p^f は消え、従って (4) の解を f に積分すれば (2) の解が得られる。(4) では、 E の条件として π の一様性を仮定し、 f の代りに δ_x を用いることが出来る。従って、 δ_x の条件は初期分布 f に置き換える。このとき問題の一様性の時刻 t は x によらずに定まる。

(4) は次のように逐次近似で与えられる。

$$S_0^f(t, x, E) = p_0(t, x, E).$$

$$S_{n+1}^f(t, x, E) = p_0(t, x, E) + \int_0^t \int_{R^2} S_n^f(\tau, x, dy) S_n^f(\tau, dy') g(y) \\ \times \int_R \pi(y, y', dz) p_0(t-\tau, z, E).$$

$$\text{但し, } S_n^f(t, E) = \int_R f(dx) S_n^f(t, x, E).$$

$S_n^f(t, x, \cdot)$ は substochastic measure π の n 次 ρ 。 π の ρ の性質を $p^f(t, x, E)$ と $x' < x$ とすれば (4) 成立する。

g の有界性から解は確率分布で、解の一貫性も判る。 g が有界ならば、場合によっては $p^f(t, x, E)$ は確率分布で示す。 (4) の解のうち π minimal なるものを証明する。

逐次近似法で得られるこの解は、この意味で Chapman—

Kolmogorov 方程式を導く。

$$(5) \quad p^f(s+t, x, E) = \int_R p^f(s, x, dy) p^f(t, y, E),$$

$$\text{但し, } f_s(\cdot) = \int_R f(dy) p^f(s, x, \cdot).$$

この式は注意して

$$p(s, x, t, E) = p_{(t, x, E)}^{f_s}$$

と表わすことができる。 (5) を用いて $s < t < u$ に対して

$$p(s, x, u, E) = \int_R p(s, x, t, dy) p(t, y, u, E).$$

これは時間的に一様である。 transition を知りたい通称の Chapman

Kolmogorov 方程式であり、従って $p(s, x, t, E)$ を x による Markov

過程の構成ができる。 この process は t を s から見て $t-s$ の経過の

一粒の行動と記述し $t-s$ と見ることもできる。 $g(t)$ と

同じ時間 t の s 以後の $t-s$ 間の s の行動も時間的に一様

であるかのようにも思えるが、それは正しくない。 と言うの

は、他の粒子の時刻 s の分布は f_s であるから s 以後である。

10個の粒子はこの分布を s から他の粒子との interaction による

影響を受けて行動する。 s から時刻 t の運動は $t-s$ だけである。

Markov 性はこれによって生じるのである。 McKean [7] は、

この型の Markov 過程と通称の Markov 過程 (Markov process with

(constant mechanism) を対応させて, Markov process with non-constant mechanism を考えよう。

2. これは一つの新粒 + 糸目し, これに対する 他の 粒子の影響を... である (つまり, これ(=...) 具体的な取扱いをするための, 次のような branch を与える。



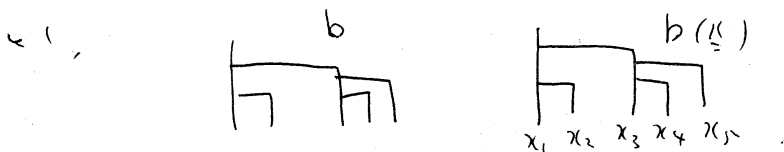
b_0 は trivial な branch だが, 上のよう枝はすべて b_0 をもとにして
 $b_1, b_2 \longrightarrow (b_1, b_2)$ により操作をくり返して構成される。 $\#(b)$ は b の節の数, $l(b)$ は b のうち一番節の多い, 分枝の節の数とする:

$$l(b_0) = 0, \quad l((b_1, b_2)) = 1 + \max(l(b_1), l(b_2)).$$

この定義から, 明らかに

$$(6) \quad \{b \mid l(b) \leq n+1\} = \{b_0\} \cup \{(b_1, b_2) \mid l(b_1) \leq n, l(b_2) \leq n\}.$$

また b の節の番号列 $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{\#(b)})$ によって b を表す。



$p(t, b(\underline{x}), E)$ をこのように定義する:

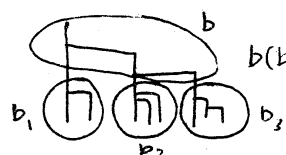
$$p(t, b_0(x_1), E) = p_0(t, x_1, E)$$

すなわち $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ に対し, $b(\underline{x}) = b(x_1, \dots, x_{\#(b)})$ と定義する. この事を確かめよう.

$$(9) \quad \sum_b p(t, b(\underline{x}), R) \equiv 1.$$

ϕ の有界性を仮定 (7) より, $\Gamma \leq 1$ がある. 変数の数に注意して, (9) と同じように証明される. 従って (10) と共に後の議論で \mathbb{R}^d の構造に対し, Γ が基本になる.

枝 b の子 \underline{x} があるとき, $b(\underline{x})$ は次のようになる.



$b(b_1, b_2, b_3)$

b の子 $b_1, b_2, \dots, b_{\#(b)}$ があるとき

の $b(b_1, \dots, b_{\#(b)})$ と書く. $b =$

$b'(b_1, \dots, b_m)$ であるとき $b \leq b'$ とかく. $b \leq b'$ ならば

b' の子 $b_1, b_2, \dots, b_{\#(b')}$ は unique であるから

から $(b_1, \dots, b_{\#(b)}) \leq b/b'$ とかく. このとき branch に対する

Chapman-Kolmogorov の等式が成立する. Γ についても同様である.

$$(10) \quad p(s+t, b(\underline{x}), E) = \sum_{b' \leq b} \int_{\mathbb{R}^{\#(b')}} \prod_{b_k \in b/b'} P(s, b_k(x_k), dy_k) p(t, b'(\underline{y}), E).$$

すなわち b/b' の集合 $\{b_1, \dots, b_{\#(b/b')}\}$ は同一根を持つ. (10)

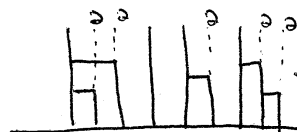
は, 時刻 $s+t$ で b の到達する順序 Γ -interaction から起こる.

すなわち, 時刻 s で $b' = b/b'$ の interaction から進行する.

この可能性を Γ の集合の元とする. $p(t, b'(\underline{y}), E)$ は時刻

s 以後の interaction に対応する.

4. これは無限個の粒子の運動を記述する Markov 過程を、次のような図を繰り返すことから構成



してゆく。

まず R の拘束条件を一つ加えたものを $\bar{R} = R \cup \{\partial\} \in \mathcal{C}$,

$\underline{R} = R \times \bar{R}^{\infty} \in \mathcal{C}$. $\underline{x} \in \underline{R}$ とは $\underline{x} \in R \times \bar{R}^{n-1}$ なる

$\#(\underline{x})$ は \underline{x} の成分中の ∂ の個数とする. $\#(b) \leq \#(\underline{x})$ の

とき, $b(\underline{x})$ は b の足る \underline{x} の ∂ の成分を左から順に一つずつ取り、 b の左端まで一つつけて止めたものを ∂ とする。

$\#(\underline{x}) = \infty$ のとき $\underline{E} = E_1 \times \{\partial\}^{n_1-1} \times E_2 \times \{\partial\}^{n_2-1} \times \dots \times E_k \times \{\partial\}^{n_k-1}$,

$E_i \in \mathcal{B}(R)$, $1 \leq i \leq k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, n は 1 2

$$P^{(n)}(t, \underline{x}, \underline{E}) = \sum_{\substack{\#(b_k) = \#(\underline{x}_k), 1 \leq k \leq n \\ \#(b_k) \geq \#(\underline{x}_k)}} \prod_{i=1}^n p(t, b_i(\underline{x}_i), E_i) \cdot \begin{cases} x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} \neq \partial, \\ 1 \leq k \leq k-1, a \neq \partial \end{cases}$$

$$= 0, \text{ その他の場合}$$

と定義する。但し, $\underline{x}_1 = (x_1, \dots, x_{n_1})$, $\underline{x}_2 = (x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2})$, \dots , $\underline{x}_k = (x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_k})$,

\dots , \underline{x}_s , $\underline{x}_k' = (x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_n)$. s は b_k の足る n 一つ

行の左端から ∂ の個数 $\#(\underline{x}_k)$ だけ取り出す。この $P^{(n)}$ は (9) より

$R \times \bar{R}^{n-1}$ 上の確率分布の unique な拡張される。(これはこの

意味で, Markov 過程の consistency condition を満たす。

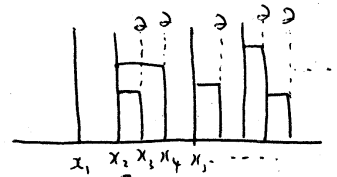
$$P^{(n+1)}(t, \underline{x}, \underline{E} \times \bar{R}) = P^{(n)}(t, \underline{x}, \underline{E}), \quad \underline{E} \in \mathcal{B}(R \times \bar{R}^{n-1}).$$

故に Kolmogorov の拡張定理により $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の $p(t, \underline{x}, \cdot)$

がこの条件を満たすものが存在する。但し, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} の cyl-

また、

この process では各座標からひとつの粒子にのみ対応している。
 R に居る各粒子は次のようなルールに従って動いている。まず、その粒子自身の jump time が来ると、又は R に居る最も近い左側の粒子からの interaction を受けたとき、又は R と最も近い右側の粒子と interact して jump する。この時の jump を決める確率分布が $\pi(x, x', t)$ であり、 x が jump の出発点、 x' が右側の粒子の位置である。逆に、もしもその粒子自身の jump time よりも先に左側の粒子からの interaction を受けたら、その粒子は直ちにその左側の粒子と interact することになる。このような場合、この粒子は「死んだ」といえるが、この model の場合はむしろ「忘れられた」とか「無視された」とかという方が適当のように見える。と云うのは interact した粒子は「登録」はされているが、逆に「忘れられた」粒子は R に居る他の粒子の立場からは R に存在しない。と云うことが取扱われるのである。このような interaction の性格は、時々々の Boltzmann の gas が稀薄である、(1)



under set \mathbb{R}^n is a Borel field $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$$P(t, x, \mathbb{E} \times \mathbb{R}^\infty) = P^{(n)}(t, x, \mathbb{E}), \quad \mathbb{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

$$\#(\mathbb{E}) = n < \infty \text{ のとき, } \mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{S}^{n_1-1} \times \mathbb{E}_2 \times \mathbb{S}^{n_2-1} \times \mathbb{E}' \text{ なる}$$

$$P(t, x, \mathbb{E}) = \sum_{(\#(b_i)=n_i, 1 \leq i \leq k)} \prod_{i=1}^k P(t, b_i, \mathbb{E}_i) \times \delta_{\mathbb{S}^\infty}(\mathbb{E}'), \quad \begin{matrix} n_1 + \dots + n_k = n \\ 1 \leq i \leq k, n_i \geq 1 \end{matrix}$$

$$= 0, \quad \text{その場合のとき}.$$

と定義し, $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ と自然に拡張される確率分布である.

以上より次の場合 (10) により, $\mathbb{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$(11) \quad P(s+t, x, \mathbb{E}) = \int_{\mathbb{R}} P(s, x, dy) P(t, y, \mathbb{E}).$$

$$\Omega = \mathbb{R}^{[0, \infty)} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty)^{[0, \infty)} \subset \mathbb{C}, \quad \mathcal{B} \text{ は } \Omega \text{ の cylinder}$$

set から生成される Borel field である. $\underline{x}_t(\omega)$ は Ω の元 ω

の t 座標とし, $\underline{x}_t^{(n)}(\omega)$ は \underline{x}_t の第 n 座標とする. したがって

$$\underline{x}_t(\omega) = (\underline{x}_t^{(1)}(\omega), \underline{x}_t^{(2)}(\omega), \dots, \underline{x}_t^{(n)}(\omega)). \quad \text{Kolmogorov の拡張定理}$$

は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に適用可能であるから, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ と

transition probability $P(t, x, \mathbb{E})$ から次のような (Ω, \mathcal{B})

上の確率分布 $P_{\underline{x}}(\cdot)$ が定まる: $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n$, に対し

$$P_{\underline{x}}(\{\omega \in \Omega \mid \underline{x}_t(\omega) \in A_1, \dots, \underline{x}_{t_n}(\omega) \in A_n\})$$

$$= \int_{A_1} P(t_1, x, dy_1) \int_{A_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \int_{A_{n-1}} P(t_{n-1} - t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}) P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, A_n).$$

従って, state space \mathbb{R} , transition probability $P(t, x, \mathbb{E})$ により

Markov process $\underline{M} = (\Omega, \mathcal{B}, P_{\underline{x}}(\cdot), \underline{x} \in \mathbb{R}, \underline{x}_t(\omega))$ が構成される.

「= 粒 + 1 の相対作用が = 序に起こる可能性が一定と無限可能である」という事述いよく照応して、この = 序に = 2 が含まれる。

また, measure $P_\lambda(\cdot)$ は初期分布 $f^\infty(dx) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(dx_i)$ と $u \in S_{M,3} \times f^\infty = \mathcal{G}_{M,3}(dx) \times \prod_{i=2}^{\infty} f_i(dx_i)$ で与えられる。計算を各々 $P_{f^\infty}(\cdot)$ と u

$P_{\mathcal{G}_{M,3}} f^\infty(\cdot)$ で表わす。 $u(t, E) = P^f(t, E)$ と $P^f(t, x_1, E)$ は

$$u(t, E) = P^f(t, E) = P_{f^\infty}(x_t'' \in E)$$

$$P^f(t, x_1, E) = P_{\mathcal{G}_{M,3}} f^\infty(x_t'' \in E)$$

である。これは前記のベクトル場の説明を正当化している。

5. Boltzmann gas model について Kac [7] の propagation of chaos という現象を思い出すが、これは一応いえることである。「時刻 0 に各粒子が互いに独立かつ同一の初期分布 f で出発したとすると、 t 時間後の位置も亦、独立かつ同分布に従う。この分布は f の初期値と等しい Boltzmann の方程式の解 $u(t, \cdot) = P^f(t, \cdot)$ である。」初期条件に与えた chaos である「独立同分布」が、この方程式によって伝播する (propagate) という主張である。

このため Kac が具体的に証明したことは、方程式 (1) の解が一意であることである。

また $\text{tr} X(1)$, R^n 上のような generator を与える。

$$G^{(m)}(\underline{x}, \underline{E}) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{(k,j) \in M \\ k \neq j}} g(x_k, x_j) (\pi(x_k, x_j, E_k) - \delta_{x_k}(E_k))$$

$\underline{x} \in R^n$, $\underline{E} = E_1 \times \dots \times E_n \in \mathcal{B}(R^n)$, π は $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$ 上の kernel
 $u - \frac{\partial}{\partial t} u$ の近似値を求め、これを計算

$$\frac{\partial}{\partial t} u = G^{(m)} u$$

は $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$ 上の transition probability $p^{(m)}(t, \underline{x}, \underline{E})$ を与える

3. $p^{(m)}(t, \underline{x}, \underline{E})$ が与えられると R^n 上の Markov 過程 $\underline{M}^{(m)}$, その
 path function は $\underline{x}_t(\omega^{(m)}) = (x_t^{(1)}(\omega^{(m)}), \dots, x_t^{(n)}(\omega^{(m)}))$ とし、この
 Markov 過程の measure $P_x(\cdot)$ は初期分布 $f^{(m)}(dx) = f(dx_1) \times \dots$
 $\times f(dx_n)$ とする。このとき任意の関数 u に対して

$$P_{f^{(m)}}^{(m)}(x_t^{(1)} \in E_1, \dots, x_t^{(n)} \in E_n)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_f(x_t \in E_1) \cdot \dots \cdot P_f(x_t \in E_n) = u(t, E_1) \cdot \dots \cdot u(t, E_n).$$

すなわち $P_f(\cdot)$ は $\underline{M}^{(m)}$ における一粒子の運動の transition probability
 $p(s, x, t, E)$ であり、初期分布 f を与えるとき $\underline{M}^{(m)}$ の分布となる。

そこで今このベクトル過程の性質を、 $\underline{M}^{(m)}$ における path
 space を用いて、最初 n 成分のベクトル過程をほかに与え、
 立式にすることを試みる。

任意の関数 u に対して $t > 0$ に対し、 N_1, N_2, \dots を次のように定義する。
 $N_1(\omega) = 1$, $N_2(\omega) = \inf \{n \mid n > N_1(\omega), x_t^{(n)}(\omega) \in R\}$,
 \dots , $N_m(\omega) = \inf \{n \mid n > N_{m-1}(\omega), x_t^{(n)}(\omega) \in R\}$. このとき

この二つが一致する。

$$\begin{aligned} P_{f^\infty}(x_t^{(n)} \in E_1, \dots, x_t^{(n)} \in E_m) &= P_{f^\infty}(x_t^{(1)} \in E_1) \cdots P_{f^\infty}(x_t^{(n)} \in E_m) \\ &= P_f(x_t \in E_1) \cdots P_f(x_t \in E_m) = u(t, E_1) \cdots u(t, E_m), \end{aligned}$$

定数 u はこれよりさらに強く、この二つが一致する。

$\{x_s^{(n)}, s \leq t\}, \dots, \{x_s^{(n)}, s \leq t\}$ は $P_{f^\infty}(\cdot)$ の独立な部分であり、これら各々の $P_{f^\infty}(\cdot)$ による独立法則は $P_f(\cdot)$ である。 $\{x_s(\omega), s \leq t\}$ の法則は一致する。

6. \mathbb{R}^n は state space とする Markov 過程が生ずるものと類似の役割を果たすものと構成しよう。前のものの例は \mathbb{R}^n の場合。また、 $x \in \mathbb{R}^n$, $\underline{E} = E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\tilde{P}^{(n)}(t, x, \underline{E}) = \sum_{(b_1, \dots, b_n)} \prod_{k=1}^n p(t, b_k | x_k, E_k),$$

但し、 $x_1 = (1, \dots, x_{\#(b_1)})$, \dots , $x_n = (x_{\#(b_1)+\dots+\#(b_{n-1})+1}, \dots, x_{\#(b_1)+\dots+\#(b_n)})$.

これは容易に $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の測度分布 $\tilde{P}^{(n)}(t, x, \underline{E})$ に拡張され、 $n \rightarrow \infty$ の consistency condition を満たすことは (9) から明らかである。従って $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 上の測度分布 $\tilde{P}(t, x, \underline{E})$ がこの条件を満たすものが存在する。

$$\tilde{P}(t, x, \underline{E}^{(n)} \times \mathbb{R}^\infty) = \tilde{P}^{(n)}(t, x, \underline{E}^{(n)}), \quad \underline{E}^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

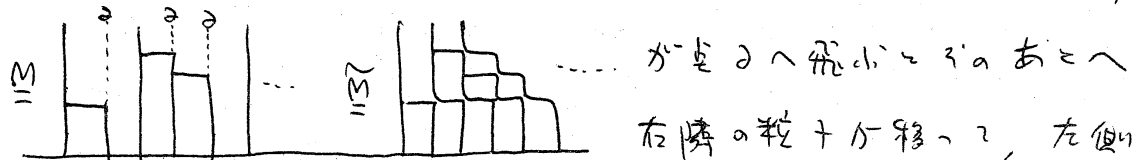
この $\tilde{P}(t, x, \underline{E})$ が Chapman-Kolmogorov 方程式を満たすことは

$\omega \in (10)$ から基本容器の正則性を得る。 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega) = (R^X)^{[0, \infty)}$,
 $\tilde{\Omega}$ は n の cylinder set から成る \mathcal{F} の σ -field であり、
 $\tilde{P}(t, x, E)$ は transition probability である Markov 過程
 $\tilde{M} = \{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}_x(\cdot), x \in R^X, x_t(\omega)\}$ から成る。

この正則性 propagation of chaos は n が ∞ に近づくにつれて
 この正則性も成立する。

$$\begin{aligned}
 & \tilde{P}_{f\infty}(x_t^{(1)} \in E_1, \dots, x_t^{(m)} \in E_m) \\
 &= \tilde{P}_{f\infty}(x_t^{(1)} \in E_1) \cdot \dots \cdot \tilde{P}_{f\infty}(x_t^{(m)} \in E_m) = u(t, E_1) \cdot \dots \cdot u(t, E_m)
 \end{aligned}$$

但し、この model \mathcal{T} は $\{x_s^{(1)}, s \leq t\}, \dots, \{x_s^{(m)}, s \leq t\}$ から
 (時刻 t の R^X の n 個の条件の下に) 独立に決まるように
 なる。 3 枚の \mathcal{F} の model \mathcal{T} は n 個の粒子の配置
 分布を決定し、この n 個の粒子、この model \mathcal{T} の 3 枚の \mathcal{F} の
 うちの一つである。 3 枚の \mathcal{F} の model \mathcal{T} の相互作用を記す。



の順序を \mathcal{T} まで決まるようにする。 3 枚の \mathcal{F} の正則性
 のようにする。 $\Psi \in \{x \in R^X \mid \#(x) = \infty\}$ から R^X への
 写像 $\Psi = \{x_1, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots\}$, $x_{n_i} \in R, 1 \leq i < \infty$,
 $\Psi(x) = \{x_1, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \dots\}$ により Ψ の \mathcal{F} である。 この時

$$\tilde{P}(t, x, E) = P(t, x, \Psi^{-1}(E)), \quad x \in R^X, E \in \mathcal{B}(R^X).$$

ただし, Boltzmann solution の R^0 の 1 個の $\tilde{m} \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t, E) = \tilde{p}_{f, \infty}(x_t'' \in E)$$

$$p^f(t, x, E) = \tilde{p}_{\delta_{ix}, x, f, \infty}(x_t'' \in E),$$

この model の一定の条件下で time reversion が成り立つ。これにより、2 個の粒子が衝突するまでの時間 τ と branching process を無限に繰り返すこととを比較する。このことは Takahashi [10] から容易に推測できる。

7. 最後の一粒の process の構成と propagation of chaos の証明の発展。Tonaka [11] が導入した process の (1.2), 以下で示す。これは本質的に (1.2) の $\alpha \geq 1$ の場合である。まず state space は $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, 但し $R^0 = \{\emptyset\}$, $x \in R^n$, $E = E_1 \times \dots \times E_n \in \mathcal{B}(R^n)$ に対して

$$p_{n,m}(t, x, E) = \sum_{\#(b_1) + \dots + \#(b_m) = n} \prod_{k=1}^m p(t, b_k(x), E_k), \quad n \geq m$$

$$= 0, \quad n < m$$

と置く。これは $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, $E \in \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)$ に対して

$$p^*(t, x, E) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,m}(t, x, E \cap R^n)$$

と定義する。これは容易に確率測度となる。Chapman-Kolmogorov の方程式と α 粒子が α -mass defect を持つ。 $\alpha = 1$

$$p^*(t, x, \{\emptyset\}) = 1 - p^*(t, x, \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n), \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$p^*(t, \emptyset, \{\emptyset\}) = 1$$

と定義する。 $\tilde{O}R^n$ への transition probability であり、これは
 以下の定まる Markov 過程の遷移確率である。 Boltzmann solution は

$$u(t, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p^k(t, x_1, E)$$

$$p^k(t, x_1, E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{n-1}} f(dx_2) \cdots f(dx_n) p^k(t, x_1, E)$$

により導出される。 この式は一見、 関数分布 $\sum_1^{\infty} f^n(dx_1)$ と
 $p^k(t, x_1, E)$ と積分（あるいは畳み込み）の結果が ≤ 1 である
 の当然のように見えるが、 $\sum_1^{\infty} f^n$ の total mass は無限である
 から収束自体も自明とはいえない。 $t \rightarrow \infty$ となることの
 証明自体は容易である。

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p^k(t, x_1, E) &= \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) p_{n,1}(t, x_1, E) \\ &= \sum_1^{\infty} \int_{R^n} f^n(dx_1) \sum_{\#(b)=n} p(t, 0(x_1), E) = \int_{R^{\infty}} f^{\infty}(dx_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\#(b)=n} p(t, 0(x_1), E) \\ &= \int_{R^{\infty}} f^{\infty}(dx_1) \sum_b p(t, 0(x_1), E) = u(t, E). \end{aligned}$$

ゆえに $\tilde{O}R^n$ への transition probability としての $p^k(t, x_1, E)$
 の mass defect の本質的役割を証明する。

この 2 つのことはこの意味を定めたとき最も簡単な場合を

1.2,

$$\begin{aligned} p^k(t, x_1, \infty) &= 1 - p(t, x_1, \tilde{O}R^n) = 1 - p(t, x_1, R) \\ &= 1 - p(t, 0(x_1), R) = \sum_{\#(b) \geq 2} p(t, 0(x_1), R). \end{aligned}$$

この x_1 は x_1 座標から x_1 を取り除いた状態に属する R^{∞} の点。

また、従って $P^*(t, x_1, \{\emptyset\})$ は時刻 0 に x_1 に居た粒子が時刻 t まで他の粒子と少なくとも一度 interact している確率である。

同様に (2), $P^*(t, (x_1, \dots, x_n), \{\emptyset\})$ は, x_1, \dots, x_n を出た n 個の粒子が, 番号が $n+1$ 以上の座標から出た粒子と時刻 t までに 少なくとも一度 interact している確率である。実際, x は n 座標を持つ $x^* = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の点と見なせ, この確率は $P_x(x_t^{(n+1)} = \emptyset)$ である。これは

$$\begin{aligned} P_x(x_t^{(n+1)} = \emptyset) &= 1 - P_x(x_t^{(n+1)} \in R) \\ &= 1 - \sum_{\substack{\#(b_1) + \dots + \#(b_n) = 1 \\ \#(b_{n+1}) \geq 1}} \prod_{k=1}^{n+1} p(t, b_k | x^*, R) \\ &= 1 - \sum_{1 \leq m \leq n} \sum_{\#(b_1) + \dots + \#(b_m) = n} \prod_{k=1}^m p(t, b_k | x^*, R) \\ &= 1 - \sum_{m=1}^n p_{n,m}(t, x^*, R) = 1 - P^*(t, x^*, \bigcup_{m=1}^n R^m) \\ &= 1 - P^*(t, x^*, \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m) = P^*(t, x^*, \{\emptyset\}). \end{aligned}$$

従って前に出てきた無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} f^{(n)}(x) P^*(t, x, E)$ の各項はそれぞれ互に相反な事象に対応しており, 和が ≤ 1 であるの当然である。

また, この粒子の集まりを表す $P(t, \{b_i\}, R)$ を x とし (2) 無限個の粒子が t の時刻に x に居るかを問うたとき, この

どのような相互作用を行ってどこに居るかを描く path space を構成することは可能であるが、こゝでは省略す。

しかしこの本質的なのは q が有界のとき、この有効方法なので、それ以外の場合はそれに対応する新しいシンボルが必要と定められ、

文献

1. L. Boltzmann, Lectures on gas theory, Univ. California Press
2. F.A. Grünbaum, Propagation of chaos for the Boltzmann equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 42, 323-344(1971)
3. D.P. Johnson, On a class of stochastic processes and its relationship in infinite particle gases, Trans. Amer. Math. Soc., 132, 275-295 (1968)
4. M. Kac, Foundations of kinetic theory, Proc. 3rd Berkeley Symp. vol. 3, 171-197(1955)

5. M. Kac, Probability and related topics in the physical sciences, New York(1959)
6. H.P. McKean, Speed of approach to the equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas, Arch. Rat. Mech. Anal., 21, 343-367 (1966)
7. H.P. McKean, A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations, Proc. Nat. Acad. Sci., 56, 1907-1911(1966)
8. H.P. McKean, An exponential formula for solving Boltzmann equation for a Maxwellian gas, J. Combinatorial Theory, 2, 358-382(1967)
9. H.P. McKean, Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations, Lecture series in Differential Equations, session 7, Catholic Univ.(1967)
10. Y. Takahashi, Markov semigroups with simplest interactions, I-II (to appear)
11. H. Tanaka, Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 17, 259-272(1970)
12. S. Tanaka, An extension of Wild's sum for solving certain non-linear equation of measure, Proc. Japan Acad., 44, 884-889(1968)
13. T. Ueno, A class of Markov processes with interaction I-II, Proc. Japan Acad., 45, 641-646, 995-1000(1969)
14. T. Ueno, A path space and the propagation of chaos for a Boltzmann's gas model, Proc. Japan Acad., 47, 529-533(1971)
15. E. Wild, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Proc. Camb. Phil. Soc., 47, 602-609(1951)